Kirillov-Reshetikhin加群のテンソル積とフュージョン積 (リー型の組合せ論)

直井, 克之

数理解析研究所講究録
第2039巻 2017年 1-10

Kirillov-Reshetikhin 加群のテンソル積とフュージョン積

東京農工大学工学研究院　直井　克之 (Katsuyuki Naoi)
Institute of Engineering,
Tokyo University of Agriculture and Technology

概要

本稿では筆者の論文 "Tensor products of Kirillov-Reshetikhin modules and fusion products" [Nao16] について, その結果および証明の概略を紹介する。

1　始めに

$\mathfrak{g}$ を複素単純 Lie 代数とする。量子ループ代数 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$[*1]の有限次元加群 V に対し, "パラメータ $q=1$ における V の極限"をとることで得られる, ループ代数 $\mathbf{L}\mathfrak{g}=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ 上の加群 $\overline{V}$ を V の**古典極限** (classical limit) と呼ぶ。古典極限 $\overline{V}$ を調べることで, 元の加群 V の構造（指標, $U_q(\mathfrak{g})$ 加群構造, 定義関係式など）に関する様々な知見が得られる。また古典極限を考えることで, その加群の新たな側面（次数付けなど）が見つかることもある。このように, 有限次元 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群に対し, その古典極限を調べることは重要である。

様々な加群の古典極限を調べるにあたり, 一つの障害となるのがテンソル積と古典極限をとる操作の非可換性である。$V_1,\dots,V_p$ を有限次元 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群とする。$U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ は Hopf 代数であるから, $V_1\otimes\cdots\otimes V_p$ もやはり $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群であり, よってその古典極限 $\overline{V_1\otimes\cdots\otimes V_p}$ を考えることが出来る。一方 $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ は Lie 代数であるから, それぞれの古典極限 $\overline{V_1},\dots,\overline{V_p}$ のテンソル積 $\overline{V_1}\otimes\cdots\otimes\overline{V_p}$ はやはり $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ 加群となる。しかし, これら二つの加群は一般には同型とならない。分かりやすく書けば,

$$\overline{V_1\otimes\cdots\otimes V_p}\not\cong\overline{V_1}\otimes\cdots\otimes\overline{V_p}$$

[*1] 本稿では, $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ は有理関数体 $\mathbb{C}(q)$ 上の代数とする。

となることが起こりうるのである。このことは, いくつかの加群に対しそれらの古典極限が分かったからといって, それらのテンソル積の古典極限が分かったことにはならないことを意味している。そこで, 以下の問題を考えることは自然であろうと思われる。

問題 テンソル積の古典極限 $\overline{V_1 \otimes \cdots \otimes V_p}$ を, それぞれの古典極限 $\overline{V_1}, \ldots, \overline{V_p}$ から構成することは可能か?

この問題について, 全ての V_k が Kirillov-Reshetikhin 加群の場合に肯定的な解答を与えた, というのが [Nao16] の主結果である。本稿では, この主結果の主張について駆け足で紹介した後, その証明の概略について述べる（主結果およびその背景について, より詳しくは [直 16] もご参照いただきたい)。

2 主定理

2.1 定理を述べるための準備

2.1.1 Kirillov-Reshetikhin 加群

I を $\mathfrak{g}$ の単純ルートの添え字集合とする。**Kirillov-Reshetikhin 加群**

$$W_q^{i,\ell}(a) \quad (i \in I, \ell \in \mathbb{Z}_{>0}, a \in \mathbb{C}(q))$$

は, 三つのパラメータでパラメトライズされる単純 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群の族である (記号の中の q は, $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群であることを明示するためのものである)。ここでは定義は述べないが, 代わりに以下の例を挙げておく。

例 2.1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ とする。このとき各 $a \in \mathbb{C}(q)^\times$ ごとに evaluation 写像と呼ばれる全射代数準同型 $\iota_a \colon U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g}) \to U_q(\mathfrak{g})$ が存在し, Kirillov-Reshetikhin 加群は単純 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群の evaluation 写像に関する引き戻しとして得られる[*2];

$$W_q^{i,\ell}(a) \cong \iota_a^* V_q(\ell\varpi_i).$$

ただし, $V_q(\lambda)$ は最高ウェイト λ の単純 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群, ϖ_i は単純ウェイトを表す。

[*2] A 型以外では evaluation 写像が存在せず, Kirillov-Reshetikhin 加群はより複雑な構造を持つ。特に $U_q(\mathfrak{g})$ 加群として単純とは限らない。

2.1.2 古典極限

有限次元 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群の, 可換部分代数 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{h})$ の作用に関する最高ウェイトベクトルを, **$\boldsymbol{\ell}$ 最高ウェイトベクトル** (ℓ-highest weight vector) という。有限次元 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群 V に対し, V の ℓ 最高ウェイトベクトルがスカラー倍を除いて唯一つ存在し, さらに V が ℓ 最高ウェイトベクトルから生成されるとき, V を **$\boldsymbol{\ell}$ 最高ウェイト加群** (ℓ-highest weight module) という。

$\mathbb{C}(q)$ の局所部分環 $\mathcal{A}$ を $\mathcal{A} = \{f(q)/g(q) \mid g(1) \neq 0\}$ と定め, $U_{\mathcal{A}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ を $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の標準的な $\mathcal{A}$ 部分代数とする [CP94]。ℓ 最高ウェイト $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群 V とその ℓ 最高ウェイトベクトル v に対し, $U_{\mathcal{A}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 部分加群 $L := U_{\mathcal{A}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})v \subseteq V$ が V の $\mathcal{A}$ 格子[*3]となるとき, $\overline{V} := \mathbb{C} \otimes_{\mathcal{A}} L$ には自然な $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ 加群構造が定まる。これを V の**古典極限**と呼ぶ。

上の構成から分かるように, 古典極限は任意の有限次元 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群に対し定義できるわけではない。Kirillov-Reshetikhin 加群のテンソル積の場合には, 以下の条件が必要十分である。

命題 2.2 ([CP01], [Nao16, Lemma 2.6]). $W_q^{i_1,\ell_1}(a_1) \otimes \cdots \otimes W^{i_p,\ell_p}(a_p)$ が古典極限を持つための必要十分条件は, 以下の二条件である:

(i) 全ての $1 \leq k \leq p$ に対し, $a_k \in \mathcal{A}^\times$ である。

(ii) $W_q^{i_1,\ell_1}(a_1) \otimes \cdots \otimes W^{i_p,\ell_p}(a_p)$ は ℓ 最高ウェイト加群である[*4]。

2.1.3 次数付き極限

$\mathbf{L}\mathfrak{g}$ $\big(= \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}]\big)$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g}[t] := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$ を**カレント代数** (current algebra) と呼ぶ。$c \in \mathbb{C}$ に対し, $\mathfrak{g}[t]$ 上の Lie 代数自己同型 φ_c を

$$\varphi_c\big(x \otimes f(t)\big) = x \otimes f(t+c)$$

と定める。

$a \in \mathcal{A}^\times$ とし, $c := a(1) \in \mathbb{C}^\times$ とおく。このとき Kirillov-Reshetikhin 加群 $W_q^{i,\ell}(a)$ $(i \in I, \ell \in \mathbb{Z}_{>0})$ の古典極限 $\overline{W_q^{i,\ell}(a)}$ を $\mathfrak{g}[t]$ に制限し, φ_{-c} によって引き戻して得られる

---

*3 $\mathbb{C}(q)$ ベクトル空間 V の $\mathcal{A}$ 部分加群 L が $\mathcal{A}$ 格子であるとは, L が自由 $\mathcal{A}$ 加群であり, $L \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{C}(q) \cong V$ となることである。

*4 どのようなパラメータに対し Kirillov-Reshetikhin 加群のテンソル積が ℓ 最高ウェイト加群（あるいは単純加群）となるかは, 団代数の理論とも関連があり (cf. [HL10]), 重要な問題である。筆者の知る限り必要十分条件は得られていないが, 有用な十分条件が [Cha02] で与えられている。

$\mathfrak{g}[t]$ 加群 $\varphi_{-c}^{*}\overline{W_q^{i,\ell}(a)}$ を考える。

命題 2.3 ([Cha01]). $\mathfrak{g}[t]$ 加群 $\varphi_{-c}^{*}\overline{W_q^{i,\ell}(a)}$ は, 自然な $\mathfrak{g}[t]$ の次数に関し次数付き加群となる。また, 同型を除いて a によらない。

この命題により, $\varphi_{-c}^{*}\overline{W_q^{i,\ell}(a)}$ を $W_q^{i,\ell}(a)$ の**次数付き極限** (graded limit) と呼び, 以下 $W^{i,\ell}$ と表すことにする。

2.1.4 フュージョン積

フュージョン積 [FL99] は, $\mathfrak{g}[t]$ 加群のテンソル積を変形して得られる概念である。$M_1, \dots, M_p$ を有限次元次数付き $\mathfrak{g}[t]$ 加群とし, また各 M_k は元 v_k で生成される一元生成加群であると仮定する。$c_1, \dots, c_p \in \mathbb{C}$ を相異なる複素数とし, $(M_k)_{c_k} := \varphi_{c_k}^{*} M_k$ とおく。このときこれらのテンソル積 $M := (M_1)_{c_1} \otimes \cdots \otimes (M_p)_{c_p}$ は, $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$ から生成される一元生成 $\mathfrak{g}[t]$ 加群となる[*5]。また M は次数付き加群ではないが,

$$M^{\leq k} = U(\mathfrak{g}[t])^{\leq k}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p)$$

によりフィルター付け $0 = M^{\leq -1} \subseteq M^{\leq 0} \subseteq \cdots \subseteq M^{\leq N} = M$ $(N \gg 0)$ を与えることが出来る。このフィルター付けに付随する次数付き空間 $\bigoplus_k M^{\leq k}/M^{\leq k-1}$ は自然に次数付き $\mathfrak{g}[t]$ 加群となる。これを $M_1 * \cdots * M_p$ と表し, $M_1, \dots, M_p$ の**フュージョン積** (fusion product) と呼ぶ。

2.2 主定理

以下が本稿の主定理である。

定理 2.4 ([Nao16, Theorem 3.1]). $i_1, \dots, i_p \in I$, $\ell_1, \dots, \ell_p \in \mathbb{Z}_{>0}$, $a_1, \dots, a_p \in \mathcal{A}^{\times}$ とし, $W_q^{i_1,\ell_1}(a_1) \otimes \cdots \otimes W_q^{i_p,\ell_p}(a_p)$ が ℓ 最高ウェイト加群であると仮定する。
(i) $a_1(1) = \cdots = a_p(1)(=: c)$ であるとき, $\mathfrak{g}[t]$ 加群としての同型

$$\overline{W_q^{i_1,\ell_1}(a_1) \otimes \cdots \otimes W_q^{i_p,\ell_p}(a_p)} \cong \varphi_c^{*}\big(W^{i_1,\ell_1} * \cdots * W^{i_p,\ell_p}\big)$$

が成り立つ。

[*5] 単にテンソルをとった $M_1 \otimes \cdots \otimes M_p$ は一元生成とは限らないことに注意。

(ii) 一般の $a_1, \ldots, a_p$ に対し, $\mathfrak{g}[t]$ 加群としての同型

$$\overline{W_q^{i_1,\ell_1}(a_1) \otimes \cdots \otimes W_q^{i_p,\ell_p}(a_p)} \cong \bigotimes_{c \in \mathbb{C}^\times} \varphi_c^* \left(\mathop{\ast}_{k;\, a_k(1)=c} W^{i_k,\ell_k} \right)$$

が成り立つ。

$a_1, \ldots, a_p \in \mathcal{A}^\times$ であることと, テンソル積が ℓ 最高ウェイト加群であることは, そもそも古典極限が定義されるために必要な仮定であった事を注意しておく (cf. 命題 2.2)。ちなみに (i) は (ii) の特別な場合に過ぎないが, 次節で述べるように (i) が本質的に証明すべき命題であり, (ii) は (i) から容易に従うので, あえて主張を分けて述べた。

3 主定理の証明

本節では, 定理 2.4 の証明について, その概略を紹介する。

3.1 (i) ⇒ (ii)

まず次の命題から, (i) のみ示せばよいことが分かる。

命題 3.1. 定理 2.4 の (ii) は, (i) から従う。

証明の概略) $V_1, \ldots, V_p$ を (テンソル積が古典極限を持つ) 任意の $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群とするとき, 古典極限の定義から (非自明な) $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ 加群準同型 $\overline{V_1 \otimes \cdots \otimes V_p} \to \overline{V_1} \otimes \cdots \otimes \overline{V_p}$ が構成できる[*6]。これを (ii) の状況に適用すると, $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ 加群準同型

$$\overline{W_q^{i_1,\ell_1}(a_1) \otimes \cdots \otimes W_q^{i_p,\ell_p}(a_p)} \to \bigotimes_{c \in \mathbb{C}^\times} \overline{\bigotimes_{k;\, a_k(1)=c} W^{i_k,\ell_k}(a_k)}$$

が構成できる。ここで, 右辺は一元生成となることが示せる。よってこの射は全射であり, さらに両辺の次元が等しいから同型である。(i) より $\overline{\bigotimes_k W^{i_k,\ell_k}(a_k)} \cong \varphi_c^* \left(\ast_k W^{i_k,\ell_k} \right)$ であるから, (ii) が従う。 □

[*6] この射は一般には全射でも単射でもない。

3.2 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ への帰着

以下, 定理 2.4 (i) の記号, および仮定の下議論を行う。定理を示すための重要なステップが, フュージョン積の定義関係式の証明である。

定理 3.2 ($\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ [FF02], $\mathfrak{g}$: 一般 [Nao16, Theorem 3.3])**.** フュージョン積 $W^{i_1,\ell_1}*\cdots*W^{i_p,\ell_p}$ は一元生成であり, その生成元を v とすると定義関係式は

$$(e_i\otimes\mathbb{C}[t])v=0 \text{ for } i\in I,\quad \big(h_i\otimes f(t)\big)v=\sum_{k;i_k=i}\ell_k f(0)v \text{ for } i\in I,\ f(t)\in\mathbb{C}[t], \tag{3.1}$$

$$\Big(F_i(z)^r\Big)_s v=0 \text{ for } i\in I, r>0, s<-\sum_{k;i_k=i}\min\{r,\ell_k\} \tag{3.2}$$

で与えられる。ただし, e_i,h_i,f_i は $\mathfrak{g}$ の Chevalley 生成元, $F_i(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(f_i\otimes t^k)z^{-k-1}$ であり, $\Big(F_i(z)^r\Big)_s\in U(\mathfrak{g}[t])$ は $F_i(z)^r$ における z^s の係数を表す。

定理 3.2 の証明については次節で述べる。定理 3.2 を用いると, 定理 2.4 (i) の証明が $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ の場合に帰着できる。

命題 3.3. 一般の $\mathfrak{g}$ に対し定理 3.2 が成り立ち, さらに $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ に対して定理 2.4 (i) が成り立てば, 一般の $\mathfrak{g}$ に対しても定理 2.4 (i) が成り立つ。

証明の概略) $i\in I$ に対し $\mathfrak{sl}_{2,i}:=\mathbb{C}e_i\oplus\mathbb{C}h_i\oplus\mathbb{C}f_i\subseteq\mathfrak{g}$ とおき, $U_{q,i}:=U_q(\mathbf{L}\mathfrak{sl}_{2,i})\subseteq U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ を対応する $\mathbb{C}(q)$ 部分代数とする。また

$$W_q:=W_q^{i_1,\ell_1}(a_1)\otimes\cdots\otimes W_q^{i_p,\ell_p}(a_p)$$

とおき, W_q の ℓ 最高ウェイトベクトルを v と表す。v から $U_{q,i}$ 上生成される W_q の部分加群 $U_{q,i}v$ を考えると,

$$U_{q,i}v\cong\bigotimes_{k;i_k=i}W^{\ell_k}$$

となる (W^ℓ は $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{sl}_2)$ の Kirillov-Reshetikhin 加群を表す。また右辺のテンソル積の順序は, 元のものと整合的とする)。よって定理 3.2 と定理 2.4 (i) (の $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ の場合) を用いれば, 古典極限 $\overline{U_{q,i}v}$ の定義関係式が得られる。簡単な議論により射 $\overline{U_{q,i}v}\to\overline{W_q}$ が構成できるので, $\overline{W_q}$ の生成元もやはりこれらの関係式を満たす。するとこれらの関係式と定理 3.2 により, 射

$$\varphi_c^*\big(W^{i_1,k_1}*\cdots*W^{i_p,\ell_p}\big)\to\overline{W_q}$$

が構成できる。右辺は一元生成であるからこの射は全射であり, 次元を比較することで同型となるので, 証明が完了する。 □

3.3 定理 3.2 の証明

$W := W^{i_1,\ell_1} * \cdots * W^{i_p,\ell_p}$ とし, 定理 3.2 において生成元と関係式で定義された加群を M と表すことにする。M が生成元と関係式で定義されていることから, 次の補題は容易に示せる。

補題 3.4. $\mathfrak{g}[t]$ 加群の全射準同型写像 $M \twoheadrightarrow W$ が存在する。

よって定理を示すには, 任意の支配的整ウェイト $\mu \in P^+$ に対し

$$\Big[M : V(\mu)\Big] \leq \Big[W : V(\mu)\Big] \tag{3.3}$$

を示せばよい。ただし $V(\mu)$ は最高ウェイト μ の単純 $\mathfrak{g}$ 加群を表す[*7]。以下三角分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ と表す。$i \in I$ に対し

$$\tilde{F}_i(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} (f_i \otimes t^k) z^{-k-1}$$

とおき, $\mathcal{J} \subseteq U(\mathbf{L}\mathfrak{n}_-)$ を集合

$$\left\{ \left(\tilde{F}_i(z)^r\right)_s \;\middle|\; i, r, s \text{ as in } (3.2) \right\}$$

から生成される $U(\mathbf{L}\mathfrak{n}_-)$ の左イデアル[*8]とすると, 比較的簡単な議論によりベクトル空間の全射

$$U(\mathbf{L}\mathfrak{n}_-)/\big(\mathcal{J} + \mathfrak{n}_-[t^{-1}]U(\mathbf{L}\mathfrak{n}_-)\big) \twoheadrightarrow M/\mathfrak{n}_- M$$

を構成することが出来る。また $\lambda \in P^+$ を M の最高ウェイトとすると, この射はウェイトを λ ずらす。このことと $\mathfrak{g}$ の有限次元表現論から従う等式

$$\Big[M : V(\mu)\Big] = \dim \Big(M/\mathfrak{n}_- M\Big)_\mu$$

[*7] $\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes 1 \subseteq \mathfrak{g}[t]$ により, $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}[t]$ の部分 Lie 代数とみなせる。

[*8] $\mathbf{L}\mathfrak{n}_- := \mathfrak{n}_- \otimes \mathbb{C}[t^{\pm}] \subseteq \mathbf{L}\mathfrak{g}$ である。また $\mathcal{J}$ を定義する際, 実際には無限和を避けるため少し工夫をする必要があるが, ここでは省略する。

を用いると, (3.3) を示すには任意の正ルートの和 $\gamma \in Q^+$ に対し, 以下の不等式を示せばよいことがわかる:

$$\dim \Big(U(\mathbf{L}\mathfrak{n}_-)/\big(\mathcal{J} + \mathfrak{n}_-[t^{-1}]U(\mathbf{L}\mathfrak{n}_-)\big)\Big)_{-\gamma} \leq \Big[W : V(\lambda - \gamma)\Big]. \tag{3.4}$$

この不等式の証明はかなり技術的なものであり, ここでは非常におおざっぱな紹介にとどめることにする。基本的な道具は, Feigin-Stoyanovsky [FS94] による双対空間 $U(\mathbf{L}\mathfrak{n}_-)^*$ の有理関数による実現である ([FKL$^+$02], [AK07] も参照)。彼らは $U(\mathbf{L}\mathfrak{n}_-)^*$（の各ウェイト空間）と, ある多変数有理関数たちのなす空間との間に自然な線形同型を与えた。この同型による同一視の下で, (3.4) に現れる $\Big(U(\mathbf{L}\mathfrak{n}_-)/\big(\mathcal{J} + \mathfrak{n}_-[t^{-1}]U(\mathbf{L}\mathfrak{n}_-)\big)\Big)_{-\gamma}$ の双対空間は, この有理関数たちのなす空間のある部分空間とみなすことが出来る。この部分空間が満たすべき条件を書き出すことで, (3.4) の左辺を上から評価することが出来る。一方 (3.4) の右辺には, [Nak03], [Her06], [DFK08] の結果を組み合わせることで得られる明示的な公式が存在する*9。この公式が左辺の評価式と一致することから, (3.4) が示される。

3.4 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ における定理 2.4 の証明

以下 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ と仮定する。このとき $I = \{1\}$ となるから, $W_q^{\ell}(a) = W_q^{1,\ell}(a)$, $W^{\ell} = W^{1,\ell}$ などと書くことにする。証明すべきことは, $a_1(1) = \cdots = a_p(1) = c$ のとき同型

$$\overline{W_q^{\ell_1}(a_1) \otimes \cdots \otimes W_q^{\ell_p}(a_p)} \cong \varphi_c^*\big(W^{\ell_1} * \cdots * W^{\ell_p}\big)$$

が成り立つことである。

この証明の最も重要なステップは, $W_q^{\ell_1}(a_1) \otimes \cdots \otimes W_q^{\ell_p}(a_p)$ を基本表現 $W_q^1(a)$ たちのテンソル積に埋め込むことである。

補題 3.5. $L = \max\{\ell_k \mid 1 \leq k \leq p\}$ とおき, 各 $1 \leq j \leq L$ に対し

$$M_j = \{1 \leq k \leq p \mid \ell_k \leq j\} \subseteq \{1, \ldots, p\}$$

とおく。このとき $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{sl}_2)$ 加群の埋め込み

$$W_q^{\ell_1}(a_1) \otimes \cdots \otimes W_q^{\ell_p}(a_p) \hookrightarrow \bigotimes_{k \in M_1} W_q^1(a_k) \otimes \bigotimes_{k \in M_2} W_q^1(q^2 a_k) \otimes \cdots \otimes \bigotimes_{k \in M_L} W_q^1(q^{2L-2} a_k)$$

が存在する。ただし右辺の各テンソルの順序は, 元のものと整合的とする。

*9 フェルミ型公式 (fermionic formula) と呼ばれる。

上の補題と古典極限の定義から, $L\mathfrak{g}$ 加群の射

$$\overline{W_q^{\ell_1}(a_1)\otimes\cdots\otimes W_q^{\ell_p}(a_p)} \to \overline{\bigotimes_{k\in M_1} W_q^1(a_k)}\otimes\cdots\otimes\overline{\bigotimes_{k\in M_L} W_q^1(q^{2L-2}a_k)}$$

が得られる。このとき右辺の各 $\overline{\bigotimes_{k\in M_j} W_q^1(q^{2j-2}a_k)}$ は, 局所 Weyl 加群 (の φ_c による引き戻し) と同型となる。「局所 Weyl 加群と Demazure 加群は同型」いう結果 ([CP01, FL07]) を用いると, 上の射の像が一般化 Demazure 加群 (generalized Demazure module) と呼ばれる加群 (の φ_c による引き戻し) と同型となることが示せる。$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ のときフュージョン積 $W^{\ell_1}*\cdots*W^{\ell_p}$ は一般化 Demazure 加群と同型であるから [FL99], 証明が完了する。

謝辞

研究集会「リー型の組合せ論」において講演の機会を与えてくださった山田裕史先生に, この場を借りて御礼申し上げます。

参考文献

[AK07] E. Ardonne and R. Kedem. Fusion products of Kirillov-Reshetikhin modules and fermionic multiplicity formulas. *J. Algebra*, 308(1):270–294, 2007.

[Cha01] V. Chari. On the fermionic formula and the Kirillov-Reshetikhin conjecture. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (12):629–654, 2001.

[Cha02] V. Chari. Braid group actions and tensor products. *Int. Math. Res. Not.*, (7):357–382, 2002.

[CP94] V. Chari and A. Pressley. *A guide to quantum groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[CP01] V. Chari and A. Pressley. Weyl modules for classical and quantum affine algebras. *Represent. Theory*, 5:191–223 (electronic), 2001.

[DFK08] P. Di Francesco and R. Kedem. Proof of the combinatorial Kirillov-Reshetikhin conjecture. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (7):Art. ID rnn006, 57, 2008.

[FF02] B. Feigin and E. Feigin. Q-characters of the tensor products in $\mathfrak{sl}_2$-case. *Mosc. Math. J.*, 2(3):567–588, 2002. Dedicated to Yuri I. Manin on the occasion of his 65th birthday.

[FKL+02] B. Feigin, R. Kedem, S. Loktev, T. Miwa, and E. Mukhin. Combinatorics of the $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ coinvariants: dual functional realization and recursion. *Compositio Math.*, 134(2):193–241, 2002.

[FL99] B. Feigin and S. Loktev. On generalized Kostka polynomials and the quantum Verlinde rule. In *Differential topology, infinite-dimensional Lie algebras, and applications*, volume 194 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 61–79. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[FL07] G. Fourier and P. Littelmann. Weyl modules, Demazure modules, KR-modules, crystals, fusion products and limit constructions. *Adv. Math.*, 211(2):566–593, 2007.

[FS94] B. Feigin and A. Stoyanovsky. Functional models of the representations of current algebras, and semi-infinite Schubert cells. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 28(1):68–90, 96, 1994.

[Her06] D. Hernandez. The Kirillov-Reshetikhin conjecture and solutions of T-systems. *J. Reine Angew. Math.*, 596:63–87, 2006.

[HL10] D. Hernandez and B. Leclerc. Cluster algebras and quantum affine algebras. *Duke Math. J.*, 154(2):265–341, 2010.

[Nak03] H. Nakajima. t-analogs of q-characters of Kirillov-Reshetikhin modules of quantum affine algebras. *Represent. Theory*, 7:259–274 (electronic), 2003.

[Nao16] K. Naoi. Tensor products of Kirillov-Reshetikhin modules and fusion products. *to appear in IMRN*, 2016.

[直 16] 直井克之. 量子ループ代数の加群におけるテンソル積と古典極限を取る操作の非可換性について. 研究集会「第二回 Algebraic Lie Theory and Representation Theory」報告集, 2016.